

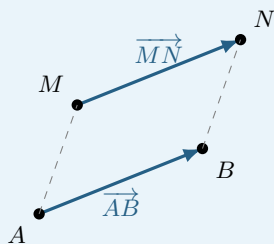
Translation et égalité de vecteurs

Classe de seconde

Objectif : décrire une translation par un vecteur et reconnaître des vecteurs égaux.

Découverte

Une translation fait glisser tous les points selon la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**.



La translation qui transforme A en B transforme aussi M en N . Les deux déplacements sont identiques :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}.$$

Un vecteur ne dépend donc pas de sa position dans le plan.

Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme, c'est-à-dire sa longueur.

Propriétés à retenir

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont :

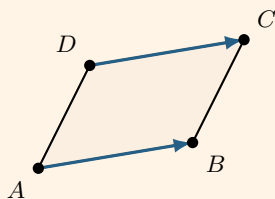
- la même direction ;
- le même sens ;
- la même norme : $AB = CD$.

Pour quatre points distincts A, B, C, D :

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

On a également $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. L'ordre des lettres est essentiel : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.

Exemples



Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme. Réciproquement, dans le parallélogramme $ABCD$:

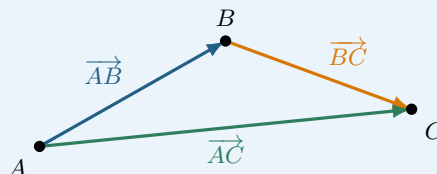
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Somme de vecteurs et relation de Chasles

Classe de seconde

Objectif : construire et calculer une somme de vecteurs.

Découverte

Un randonneur se déplace d'abord de A vers B , puis de B vers C . Le déplacement total va directement de A vers C .


On additionne les deux vecteurs en plaçant l'origine du second à l'extrémité du premier :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Cette égalité traduit l'enchaînement des deux translations.

Propriétés à retenir

Relation de Chasles : pour tous points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Règle du parallélogramme : si $ABDC$ est un parallélogramme, alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Le vecteur nul et le vecteur opposé vérifient :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}, \quad -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

La somme est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exemples

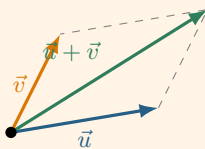
1. Simplifier avec Chasles

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

2. Remettre les vecteurs dans le bon ordre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

3. Construire une somme



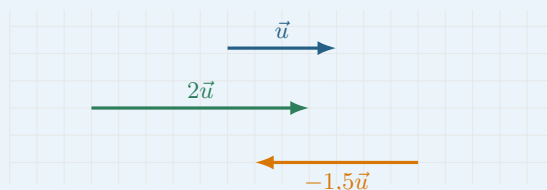
Multiplier un vecteur par un réel

Classe de seconde

Objectif : interpréter et utiliser le vecteur $k\vec{u}$.

Découverte

À partir d'un même vecteur $\vec{u}$, on peut modifier sa longueur et éventuellement son sens.



$2\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$, mais sa longueur est doublée. Le vecteur $-1,5\vec{u}$ a la même direction, le sens contraire et une longueur multipliée par 1,5.

Propriétés à retenir

Soit un réel k et un vecteur non nul $\vec{u}$. Le vecteur $k\vec{u}$:

- a la même direction que $\vec{u}$;
- a le même sens si $k > 0$, et le sens contraire si $k < 0$;
- a pour norme $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$.

De plus, $0\vec{u} = \vec{0}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Pour tous réels k, k' et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}.$$

Exemples

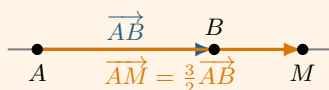
1. Réduire une expression vectorielle

$$A = 3\vec{u} - 5\vec{u} + 2\vec{v} = \boxed{-2\vec{u} + 2\vec{v}},$$

$$B = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} - 6\vec{v} - \vec{u} - \vec{v} = \boxed{\vec{u} - 7\vec{v}}.$$

2. Placer un point

Construire M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ signifie que A, B et M sont alignés, que $\overrightarrow{AM}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et que $AM = 1,5 AB$.



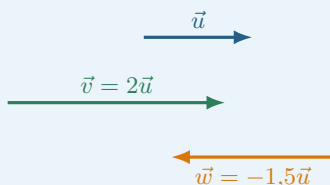
Vecteurs colinéaires

Classe de seconde

Objectif : utiliser la colinéarité pour prouver un alignement ou un parallélisme.

Découverte

Les vecteurs ci-dessous ont la même direction. Chacun peut s'écrire comme un multiple de $\vec{u}$.



Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **colinéaires**. Ils peuvent être de même sens ou de sens contraires.

Propriétés à retenir

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel k tel que

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Alignement

Pour trois points distincts A, B, C :

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Parallélisme

Pour deux droites (AB) et (CD) :

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}.$$

Exemples

1. Démontrer un alignement

On sait que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et ont la même origine A . Donc A, B, M sont alignés.



2. Démontrer un parallélisme

Si $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, $(CD) \parallel (AB)$.

Attention : des vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement colinéaires ; il faut qu'ils aient la même direction.

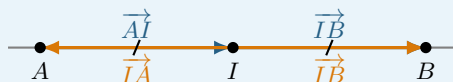
Caractérisations vectorielles du milieu

Classe de seconde

Objectif : reconnaître et démontrer qu'un point est le milieu d'un segment.

Découverte

Le point I est le milieu de $[AB]$: il est situé à égale distance de A et de B sur la droite (AB) .



Les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont même direction, même sens et même norme : ils sont égaux. Les vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IB}$ sont opposés.

Propriétés à retenir

Pour trois points A, B, I , les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \iff \vec{AI} = \vec{IB} \iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}.$$

Pour tout point M du plan :

$$I \text{ milieu de } [AB] \iff \vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB}).$$

En particulier, avec une origine O :

$$\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

Enfin, un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le même milieu.

Exemples

1. Montrer qu'un point est un milieu

On sait que $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Par Chasles,

$$\begin{aligned} \vec{IB} &= \vec{IA} + \vec{AB} = -\vec{AI} + \vec{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{AI}. \end{aligned}$$

Donc I est le milieu de $[AB]$.

2. Utiliser un point quelconque

Si I est le milieu de $[AB]$, alors, pour tout point M ,

$$\vec{MA} + \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) = 2\vec{MI},$$

car $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$.

Point de vigilance

$IA = IB$ seul ne suffit pas : tous les points de la médiatrice de $[AB]$ sont équidistants de A et B . Il faut aussi que I appartienne à (AB) , ou utiliser une égalité vectorielle.