

DM 1 – Calcul littéral

Corrigé détaillé et méthodes

Pour travailler avec ce corrigé : essayer chaque question, puis lire une étape à la fois. Les résultats encadrés sont les réponses, mais les calculs qui les précèdent expliquent comment les obtenir.

Exercice 1 – Pour s'entraîner pour le DS

1) Développer les expressions

Rappel. Développer, c'est transformer un produit en une somme ou une différence. Réduire, c'est ensuite regrouper les termes de même nature : les termes en x^2 ensemble, les termes en x ensemble et les nombres seuls ensemble.

a) $A = (2x + 7)(x - 3)$

Étape 1 : distribuer chaque terme de la première parenthèse.

Chaque terme de $(2x + 7)$ multiplie *chacun* des termes de $(x - 3)$. Il faut donc écrire quatre produits :

$$A = 2x \times x + 2x \times (-3) + 7 \times x + 7 \times (-3).$$

Étape 2 : calculer les quatre produits.

On utilise $x \times x = x^2$ et la règle des signes : un facteur positif multiplié par un facteur négatif donne un produit négatif.

$$A = 2x^2 - 6x + 7x - 21.$$

Étape 3 : regrouper les termes en x .

Comme $-6x + 7x = (-6 + 7)x = x$, on obtient

$$\boxed{A = 2x^2 + x - 21}.$$

Attention : on ne regroupe pas $2x^2$ et x : ce ne sont pas des termes de même nature.

b) $B = (5x - 3)^2$

Étape 1 : reconnaître un carré d'une différence.

La formule est $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Ici, $a = 5x$ et $b = 3$:

$$B = (5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2.$$

Étape 2 : calculer chaque terme.

On a $(5x)^2 = 5^2x^2 = 25x^2$, $2 \times 5x \times 3 = 30x$ et $3^2 = 9$. Ainsi,

$$\boxed{B = 25x^2 - 30x + 9}.$$

Pour retrouver la formule : écrire le carré comme un produit :

$$(5x - 3)(5x - 3) = 25x^2 - 15x - 15x + 9 = 25x^2 - 30x + 9.$$

Piège à éviter : $(5x - 3)^2$ n'est pas égal à $25x^2 - 9$. Il ne faut pas oublier le terme du milieu, $-30x$.

Exercice 1 – Suite

2) Factoriser les expressions

Rappel. Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit. C'est l'opération inverse du développement. On cherche d'abord un **facteur commun**, ou bien une **identité remarquable**.

a) $C = (x - 4)(2x - 1) - (x - 4)(-3x + 5)$

Étape 1 : repérer le facteur commun.

Le facteur $(x - 4)$ apparaît dans chacun des deux produits :

$$C = \underbrace{(x - 4)}_{\text{facteur commun}} (2x - 1) - \underbrace{(x - 4)}_{\text{facteur commun}} (-3x + 5).$$

Étape 2 : mettre ce facteur devant un crochet.

On utilise $ab - ac = a(b - c)$. Dans le crochet, on conserve la différence des deux facteurs restants :

$$C = (x - 4)[(2x - 1) - (-3x + 5)].$$

Étape 3 : enlever les parenthèses à l'intérieur du crochet.

Un signe $-$ devant une parenthèse change le signe de *tous* ses termes :

$$-(-3x + 5) = +3x - 5.$$

Donc

$$\begin{aligned} C &= (x - 4)[2x - 1 + 3x - 5] \\ &= (x - 4)[(2x + 3x) + (-1 - 5)]. \end{aligned}$$

Étape 4 : réduire le crochet.

Comme $2x + 3x = 5x$ et $-1 - 5 = -6$, on trouve

$$\boxed{C = (x - 4)(5x - 6)}.$$

Pourquoi s'arrêter ici ? La réponse est un produit de deux facteurs : l'expression est bien factorisée. La développer à nouveau ferait perdre la forme demandée.

b) $D = 25 - 9x^2$

Étape 1 : reconnaître une différence de deux carrés.

On remarque que $25 = 5^2$ et que $9x^2 = (3x)^2$. Ainsi,

$$D = 5^2 - (3x)^2.$$

Étape 2 : appliquer l'identité remarquable.

La formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ donne, avec $a = 5$ et $b = 3x$,

$$\boxed{D = (5 - 3x)(5 + 3x)}.$$

Vérification en développant :

$$(5 - 3x)(5 + 3x) = 25 + 15x - 15x - 9x^2 = 25 - 9x^2.$$

Les deux termes en x s'annulent : on retrouve l'expression de départ.

Exercice 1 – Suite

3) Écrire sous la forme d'un unique quotient

Rappel. Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut les écrire avec le **même dénominateur**. On additionne ou soustrait alors les numérateurs et on conserve ce dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}, \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d} \quad (d \neq 0).$$

Un dénominateur ne peut jamais être nul : il faut préciser les valeurs interdites.

a) $E = 5 + \frac{3x-5}{2x}$, avec $x \neq 0$

Étape 1 : écrire le nombre 5 avec le dénominateur $2x$.

On part de $5 = \frac{5}{1}$ et on multiplie le numérateur *et* le dénominateur par $2x$. Cela ne change pas la valeur de la fraction puisque $2x \neq 0$:

$$5 = \frac{5 \times 2x}{1 \times 2x} = \frac{10x}{2x}.$$

Étape 2 : réunir les deux fractions.

$$\begin{aligned} E &= \frac{10x}{2x} + \frac{3x-5}{2x} \\ &= \frac{10x + (3x-5)}{2x} \\ &= \frac{10x + 3x - 5}{2x}. \end{aligned}$$

En réduisant le numérateur, on obtient

$$E = \frac{13x-5}{2x} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

b) $F = \frac{4x}{x+1} - \frac{1}{x}$

Étape 1 : déterminer les valeurs interdites.

Il faut $x+1 \neq 0$ et $x \neq 0$, donc $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

Étape 2 : choisir le dénominateur commun $x(x+1)$.

Dans la première fraction, il manque le facteur x au dénominateur. Dans la seconde, il manque le facteur $(x+1)$. On écrit donc

$$\frac{4x}{x+1} = \frac{4x \times x}{(x+1) \times x} = \frac{4x^2}{x(x+1)}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1 \times (x+1)}{x \times (x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)}.$$

Étape 3 : soustraire les numérateurs, puis réduire.

$$F = \frac{4x^2}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{4x^2 - (x+1)}{x(x+1)}.$$

Attention au signe $-$: $-(x+1) = -x-1$. Finalement,

$$F = \frac{4x^2 - x - 1}{x(x+1)} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1.$$

Piège à éviter : on ne peut pas supprimer des x dans une somme. Une simplification exige un *facteur* commun à tout le numérateur et à tout le dénominateur.

Exercice 1 – Suite

4) Résoudre les équations

Rappel. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie. On conserve l'égalité en effectuant la même opération dans les deux membres.

a) $(2x + 3)(5 - x) = 0$

Étape 1 : reconnaître une équation produit nul.

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul. On n'a donc pas besoin de développer :

$$(2x + 3)(5 - x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \text{ ou } 5 - x = 0.$$

Étape 2 : résoudre chacune des deux équations.

Pour le premier facteur, on soustrait 3, puis on divise par 2 :

$$2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

Pour le second facteur, on ajoute x aux deux membres :

$$5 - x = 0 \iff 5 = x \iff x = 5.$$

Étape 3 : donner les solutions.

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2}; 5 \right\}.$$

Pour $x = -\frac{3}{2}$, le premier facteur vaut $2 \times (-\frac{3}{2}) + 3 = 0$. Pour $x = 5$, le second facteur vaut $5 - 5 = 0$. Dans les deux cas, le produit est bien nul.

b) $\frac{3 + 2x}{x + 2} = 5$

Étape 1 : préciser la valeur interdite.

Le dénominateur doit être non nul : $x + 2 \neq 0$, donc $x \neq -2$.

Étape 2 : multiplier les deux membres par $x + 2$.

Pour $x \neq -2$, on peut supprimer le dénominateur de cette façon :

$$\frac{3 + 2x}{x + 2} = 5 \iff 3 + 2x = 5(x + 2) \iff 3 + 2x = 5x + 10.$$

Étape 3 : isoler x .

On soustrait $2x$, puis 10, puis on divise par 3 :

$$3 = 3x + 10 \iff -7 = 3x \iff x = -\frac{7}{3}.$$

Étape 4 : vérifier que la solution est autorisée.

Comme $-\frac{7}{3} \neq -2$, cette valeur convient. On peut aussi vérifier :

$$\frac{3 + 2 \times (-7/3)}{-7/3 + 2} = \frac{-5/3}{-1/3} = \left(-\frac{5}{3}\right) \times (-3) = 5.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{3} \right\}.$

Exercice 2 – Pour chercher et réfléchir

1) Démontrer l'identité pour tout nombre k

On veut montrer que

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3.$$

Méthode : on transforme le membre de gauche jusqu'à obtenir celui de droite. Tester quelques valeurs ne suffirait pas à prouver une égalité pour *tous* les nombres.

Étape 1 : reconnaître une différence de deux carrés.

On utilise $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = \frac{k(k+1)}{2}$ et $b = \frac{k(k-1)}{2}$. Ainsi,

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right) \left(\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}\right).$$

Étape 2 : simplifier le premier facteur.

Les dénominateurs sont déjà égaux. On regroupe les numérateurs, puis on met k en facteur :

$$\frac{k(k+1) - k(k-1)}{2} = \frac{k[(k+1) - (k-1)]}{2} = \frac{k(k+1 - k+1)}{2} = \frac{2k}{2} = k.$$

Attention au signe : $-(k-1) = -k+1$, d'où $(k+1) - (k-1) = 2$.

Étape 3 : simplifier le second facteur.

$$\frac{k(k+1) + k(k-1)}{2} = \frac{k[(k+1) + (k-1)]}{2} = \frac{k(2k)}{2} = k^2.$$

Étape 4 : multiplier les résultats.

Le premier facteur vaut k et le second vaut k^2 . Leur produit vaut $k \times k^2 = k^3$. Donc, pour tout nombre réel k ,

$$\boxed{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3}.$$

2) Effectuer le calcul pour $k = 2$, puis calculer $1^3 + 2^3$

On remplace *chaque* k par 2 dans l'identité :

$$\begin{aligned} 2^3 &= \left(\frac{2(2+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2(2-1)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2 \times 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{2 \times 1}{2}\right)^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, l'énoncé donne $1^3 = 1^2 - 0^2$. En additionnant,

$$1^3 + 2^3 = (1^2 - 0^2) + (3^2 - 1^2) = 3^2 - 0^2 = 9.$$

Le $+1^2$ et le -1^2 s'annulent. On retient

$$\boxed{1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2}.$$

Exercice 2 – Suite

3) Conjecturer la valeur de $S = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3$

Ici, k est un **entier supérieur ou égal à 1**, puisqu'il indique jusqu'à quel entier on additionne les cubes. **Conjecturer**, c'est proposer une propriété qui semble vraie à partir d'observations, sans l'avoir encore démontrée.

Étape 1 : observer les premières sommes.

k	Somme des cubes	Carré de la somme
1	$1^3 = 1$	$1^2 = 1$
2	$1^3 + 2^3 = 9$	$(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$
3	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$	$(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$
4	$1 + 8 + 27 + 64 = 100$	$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$

Ces exemples suggèrent que la somme des cubes est le carré de la somme des entiers correspondants.

Étape 2 : utiliser la formule donnée dans l'énoncé.

Puisque $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, on conjecture que

$$S = (1 + 2 + \dots + k)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

On peut aussi écrire $S = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$. Attention : en élevant une fraction au carré, on élève aussi son dénominateur au carré, donc $2^2 = 4$.

4) Compléter la phrase

« La somme des cubes des k premiers entiers est égale au carré de la somme de ces k premiers entiers. »

Dans cette phrase, il s'agit des entiers de 1 à k . **À bien distinguer** : on additionne les cubes à gauche ; à droite, on additionne d'abord les entiers, puis on élève le résultat au carré.

Pour comprendre pourquoi la conjecture est vraie

Ce complément va au-delà de la conjecture demandée. La question 1 fournit des différences dont les termes s'annulent lorsqu'on les additionne :

$$\begin{aligned}1^3 &= 1^2 - 0^2, \\2^3 &= 3^2 - 1^2, \\3^3 &= 6^2 - 3^2, \\4^3 &= 10^2 - 6^2.\end{aligned}$$

Par exemple, la somme de ces quatre lignes vaut

$$(1^2 - 0^2) + (3^2 - 1^2) + (6^2 - 3^2) + (10^2 - 6^2) = 10^2.$$

Le même mécanisme continue jusqu'à k : le terme positif de chaque ligne est retiré à la ligne suivante, car $\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Il ne reste donc que le terme positif de la dernière ligne et -0^2 :

$$S = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 - 0^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Cette annulation de proche en proche démontre la formule.

Exercice 3 – Pour jouer

But du jeu : trouver deux façons de remplir le plateau de droite de la dernière balance pour équilibrer les **quatre carrés bleus** à gauche. Les objets de même forme ont tous la même masse.

1) Lire les deux premières balances

Une balance en équilibre signifie que les deux plateaux portent la **même masse**. Le dessin donne :

- première balance : un rond vert a la même masse qu'un triangle rouge et deux carrés bleus ;
- deuxième balance : quatre triangles rouges ont la même masse que deux ronds verts.

Autrement dit, en termes de masses,

$$\bullet \longleftrightarrow \blacktriangle \blacksquare \blacksquare \quad \text{et} \quad \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \longleftrightarrow \bullet \bullet.$$

2) Raisonner étape par étape

Étape 1 : partager les masses de la deuxième balance en deux.

Si quatre triangles équilibrent deux ronds, alors deux triangles équilibrent un rond. **Un rond a donc la même masse que deux triangles.**

Étape 2 : remplacer le rond dans la première balance.

La première balance disait : un rond équilibre un triangle et deux carrés. En remplaçant ce rond par deux triangles de même masse, on obtient :

$$\text{deux triangles} \longleftrightarrow \text{un triangle et deux carrés.}$$

On retire un triangle de chaque côté. Retirer la même masse des deux plateaux conserve l'équilibre. Il reste :

$$\text{un triangle} \longleftrightarrow \text{deux carrés.}$$

Étape 3 : passer de deux carrés à quatre carrés.

On double les masses : **quatre carrés équilibrent deux triangles**. Or deux triangles équilibrent un rond, d'après l'étape 1.

Réponse 1 : deux triangles rouges.

Réponse 2 : un rond vert.

3) Retrouver le raisonnement avec le calcul littéral

Notons r la masse d'un rond, t celle d'un triangle et b celle d'un carré. Les deux premières balances se traduisent par

$$r = t + 2b \quad \text{et} \quad 4t = 2r.$$

En divisant la deuxième égalité par 2, on obtient $2t = r$. On remplace alors r par $2t$ dans la première égalité :

$$2t = t + 2b \implies t = 2b \implies 2t = 4b.$$

Puisque $r = 2t$, on a finalement $4b = 2t = r$. Les quatre carrés, les deux triangles et le rond ont bien la même masse.