

Développer une expression

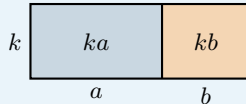
Classe de seconde

Objectif : transformer un produit en une somme algébrique à l'aide de la distributivité.

Découverte

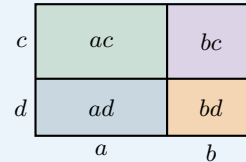
L'aire d'un rectangle peut se calculer globalement ou en additionnant les aires des morceaux.

Distributivité simple



$$k(a + b) = ka + kb$$

Double distributivité



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Formules à retenir

Pour tous nombres a, b, c, d et k :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Méthode : effectuer chaque produit en respectant les signes, supprimer les parenthèses, puis **réduire** en regroupant les termes de même nature.

Exemples

Développement simple

$$\begin{aligned} A &= 3(2x - 5) \\ &= 6x - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -4(x - 3) \\ &= -4x + 12. \end{aligned}$$

Double développement

$$\begin{aligned} C &= (2x + 3)(x - 5) \\ &= 2x^2 - 10x + 3x - 15 \\ &= \boxed{2x^2 - 7x - 15}. \end{aligned}$$

Avec deux signes négatifs :

$$D = (3x - 2)(2x - 7) = 6x^2 - 21x - 4x + 14 = \boxed{6x^2 - 25x + 14}.$$

Vocabulaire

$3(x + 2)$ est une forme **factorisée** ; $3x + 6$ est une forme **développée et réduite**.

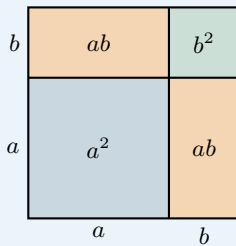
Identités remarquables

Classe de seconde

Objectif : reconnaître, démontrer et utiliser les trois identités remarquables.

Découverte

On connaît déjà $(a + b)^2$. Géométriquement, le carré de côté $a + b$ est partagé en quatre parties :



donc

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En remplaçant b par $-b$, on obtient :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Enfin, développer $(a - b)(a + b)$ fait disparaître les termes ab et $-ab$.

Formules à retenir

Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Dans les deux premières formules, le terme du milieu est le **double produit** $2ab$. Le dernier terme b^2 est toujours positif.

Exemples

$$A = (x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25,$$

$$B = (3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16,$$

$$C = (2x - 7)(2x + 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49.$$

Calcul mental : $103^2 = (100 + 3)^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609.$

Factoriser une expression

Classe de seconde

Objectif : transformer une somme en un produit, notamment à l'aide des identités remarquables.

Découverte

Factoriser est l'opération inverse de développer.

$$\underbrace{3(x+4)}_{\text{produit}} \xrightarrow{\text{développer}} \underbrace{3x+12}_{\text{somme}} \quad \text{et} \quad 3x+12 \xrightarrow{\text{factoriser}} 3(x+4).$$

Dans $3x+12$, les deux termes contiennent le **facteur commun** 3.

Les identités remarquables se lisent aussi de droite à gauche :

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2.$$

Il faut reconnaître deux carrés et, entre eux, le double produit.

Formules à retenir

Avec un facteur commun :

$$ka + kb = k(a+b)$$

$$ka - kb = k(a-b)$$

Avec une identité remarquable :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Stratégie : chercher d'abord un facteur commun ; sinon, repérer une identité remarquable. Toujours vérifier en redéveloppant mentalement.

Exemples

1. Facteur commun

$$\begin{aligned} A &= 5x^2 - 15x \\ &= 5x(x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x+2)(3x-1) + 4(x+2) \\ &= (x+2)[(3x-1) + 4] \\ &= (x+2)(3x+3). \end{aligned}$$

2. Identités remarquables

$$\begin{aligned} C &= x^2 - 10x + 25 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= (x-5)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 9x^2 - 16 \\ &= (3x)^2 - 4^2 \\ &= (3x-4)(3x+4). \end{aligned}$$

Point de vigilance

$a^2 + b^2$ ne correspond à aucune identité remarquable : en général, cette somme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

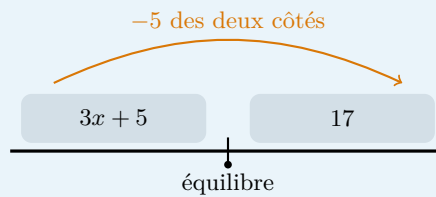
Résoudre des équations

Classe de seconde

Objectif : résoudre une équation du premier degré, une équation produit ou une équation quotient simple.

Découverte

Résoudre une équation, c'est chercher toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.



Une égalité reste vraie lorsqu'on effectue la **même opération** dans ses deux membres. Pour certaines équations, factoriser permet d'utiliser la règle du produit nul.

Formules à retenir

Premier degré

$$ax + b = c \quad (a \neq 0)$$

On isole x en effectuant les mêmes opérations dans les deux membres.

Produit nul

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

On factorise avant d'appliquer cette règle.

Quotient nul

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Une valeur interdite annule le dénominateur.

Exemples

1. Premier degré

$$3x + 5 = 17 \iff 3x = 12 \iff x = 4 \implies S = \{4\}.$$

2. Équation produit

$$\begin{aligned} (2x - 6)(x + 5) = 0 &\iff 2x - 6 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = -5, \end{aligned}$$

d'où $S = \{-5; 3\}$.

3. Équation quotient

$$\frac{3x - 6}{x + 1} = 0.$$

Condition : $x \neq -1$. Puis $3x - 6 = 0 \iff x = 2$, valeur autorisée. Ainsi $S = \{2\}$.

Équation quotient non nul

Classe de seconde

Objectif : résoudre une équation en se ramenant à un quotient nul, avec un dénominateur non nul.

Découverte

1. Somme d'un entier et d'une fraction : du numérique au littéral.

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 3}{5} = \frac{13}{5} \quad \longleftrightarrow \quad a + \frac{b}{cx+d} = \frac{a(cx+d) + b}{cx+d}.$$

On écrit l'entier avec le même dénominateur. Dans le calcul littéral, on impose $cx + d \neq 0$.

2. Somme de deux fractions de dénominateurs différents.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{11}{15} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{(x+1) + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Ici, $x \neq 1$ et $x \neq -1$. On utilise le produit des dénominateurs comme dénominateur commun.

Dans les deux cas, on transforme la somme en **un seul quotient**.

Méthode

Pour résoudre une équation contenant des quotients :

1. Déterminer les **valeurs interdites**, qui annulent un dénominateur.
2. Regrouper tous les termes dans un membre pour obtenir une équation de la forme $\dots = 0$.
3. Mettre au **même dénominateur** afin d'obtenir un seul quotient égal à zéro.
4. **Développer et réduire le numérateur**, sans développer le dénominateur.
5. Résoudre l'équation obtenue en annulant le numérateur, puis écarter les valeurs interdites.

Pour les valeurs autorisées, on utilise la propriété :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0 \iff N(x) = 0 \quad \text{si } D(x) \neq 0.$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1$.

1. Valeurs interdites : $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

2. Obtenir un membre nul : $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - 1 = 0$.

3. Mettre au même dénominateur :

$$\frac{(x+1) + 2(x-1) - (x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0.$$

4. Développer et réduire seulement le numérateur :

$$\frac{x+1+2x-2-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \iff \frac{-x^2+3x}{(x-1)(x+1)} = 0.$$

5. Résoudre : le dénominateur est non nul pour les valeurs autorisées, donc

$$-x^2 + 3x = 0 \iff x(3-x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Les deux valeurs sont autorisées : $S = \{0; 3\}$.

Point de vigilance

Un quotient est nul si son **numérateur est nul** et son **dénominateur est non nul**.