

Chapitre 1 : Exercices de révision

Exercice 1 — Diviseurs et factorisation

Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$a^2 - b^2 = 72.$$

Présenter une recherche exhaustive et vérifier les couples obtenus.

Exercice 2 — Combinaison linéaire

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que

$$(5n + 8) \mid (2n - 3).$$

Indication : fabriquer une combinaison dans laquelle n disparaît, puis étudier les diviseurs de la constante obtenue.

Exercice 3 — Division euclidienne

Dans la division euclidienne de -83 par un entier naturel non nul d , le reste est 17.

- a) Écrire l'égalité de la division et la condition sur d .
- b) Déterminer toutes les valeurs possibles de d et du quotient q .

Exercice 4 — Classes de restes

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$5 \mid n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

On pourra dresser un tableau suivant les cinq valeurs possibles de n modulo 5.

Exercice 5 — Congruences et puissances

- a) Calculer le reste de 7^{2026} dans la division par 10.
- b) Déterminer les entiers $x \in \{0, 1, \dots, 6\}$ vérifiant

$$3x + 4 \equiv 2 \pmod{7}.$$

- c) Trouver un inverse de 3 modulo 7, puis contrôler le résultat de la question précédente.

Exercice 6 — Cryptage affine

On numérote les lettres de $A = 0$ à $Z = 25$. Une lettre de numéro n est codée par le reste m de

$$m \equiv 7n + 5 \pmod{26}.$$

- a) Coder les lettres D , S et Z .
- b) Vérifier que 15 est un inverse de 7 modulo 26.
- c) Montrer que le décodage est donné par $n \equiv 15(m-5) \pmod{26}$.
- d) Décoder le mot PRY.

Exercice 7 — Démonstration par récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 4^n + 15n - 1.$$

Démontrer par récurrence que $9 \mid u_n$ pour tout entier naturel n .

Auto-évaluation ☐ Je traduis « divise ». ☐ Je connais $a = bq + r$. ☐ Je réduis modulo m . ☐ Je vérifie mes solutions.