

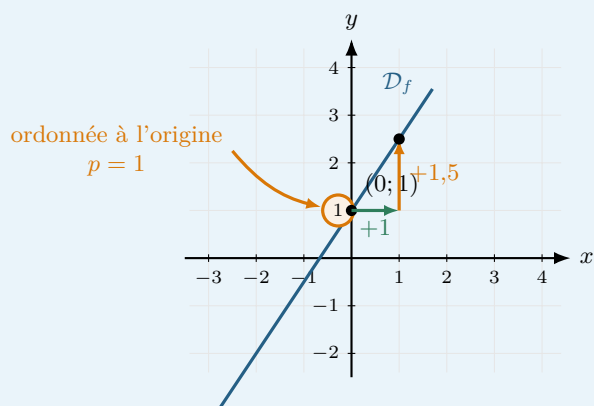
Représentation graphique

Classe de seconde

Objectif : reconnaître une fonction affine et lire son ordonnée à l'origine p et son coefficient directeur m .

Découverte

La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = mx + p$ est une droite.



La droite coupe l'axe des ordonnées au niveau du nombre entouré. On lit donc directement

$$p = 1.$$

À partir de ce point, on **avance de 1** en abscisse. Pour rejoindre de nouveau la droite, on monte de 1,5 unité. Ainsi,

$$m = \frac{+1,5}{+1} = 1,5 = \frac{3}{2}.$$

La fonction représentée est donc

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 1.$$

Propriétés à retenir

La fonction f définie par $f(x) = mx + p$ est une **fonction affine**.

- $p = f(0)$ est l'**ordonnée à l'origine** : il se lit sur l'axe vertical, au point où la droite le coupe ;
- m est le **coefficient directeur** : lorsqu'on avance de 1 en abscisse, il indique de combien on monte ($m > 0$) ou on descend ($m < 0$). Plus généralement,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

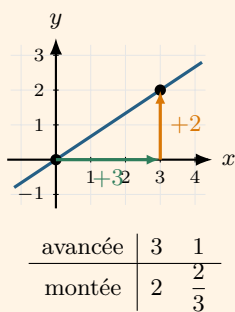
- si $m > 0$, la droite monte ; si $m < 0$, elle descend ; si $m = 0$, elle est horizontale.

Une fonction linéaire $f(x) = mx$ est une fonction affine particulière, avec $p = 0$.

Exemples

1. Retrouver un coefficient fractionnaire

Sur une droite, une avancée de 3 unités correspond à une montée de 2 unités. Les variations sont proportionnelles :

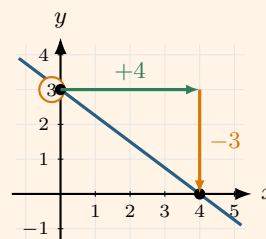


Pour une avancée de 1, on monte donc de $\frac{2}{3}$. Ainsi

$$m = \frac{2}{3}.$$

2. Avec une droite descendante

Une droite coupe l'axe des ordonnées en 3. Lorsque l'on avance de 4, on descend de 3. Par proportionnalité, pour une avancée de 1, on descend de $\frac{3}{4}$. Alors



$$p = 3, \quad m = -\frac{3}{4},$$

donc $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3.$

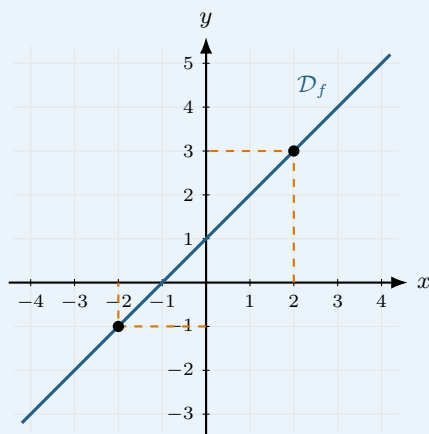
Images et antécédents

Classe de seconde

Objectif : lire graphiquement et calculer des images et des antécédents.

Découverte

On considère la fonction affine $f(x) = x + 1$, représentée ci-dessous.



Pour lire l'**image** de 2, on part de 2 sur l'axe des abscisses et on rejoint la droite, puis l'axe des ordonnées :

$$f(2) = 3.$$

Pour lire un **antécédent** de -1, on part de -1 sur l'axe des ordonnées :

$$f(-2) = -1.$$

Ainsi, -2 est l'antécédent de -1.

Propriétés à retenir

Calculer une image

L'image d'un nombre a par f est le nombre

$$f(a) = ma + p.$$

On remplace simplement x par a dans l'expression de f .

Graphiquement, l'image se lit verticalement depuis l'axe des abscisses ; un antécédent se lit horizontalement depuis l'axe des ordonnées.

Chercher un antécédent

Chercher les antécédents de b revient à résoudre

$$f(x) = b, \quad \text{soit} \quad mx + p = b.$$

Si $m \neq 0$, b possède un unique antécédent.

Exemples

Soit $g(x) = -3x + 5$.

1. Calculer l'image de -2

$$g(-2) = -3 \times (-2) + 5 = 6 + 5 = 11.$$

2. Chercher l'antécédent de -7

$$g(x) = -7 \iff -3x + 5 = -7 \iff -3x = -12 \iff x = 4.$$

Donc 4 est l'unique antécédent de -7 par g .

3. Traduire une phrase

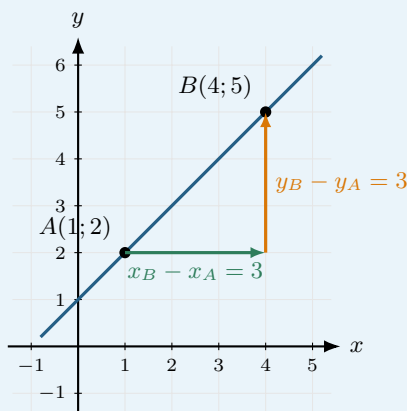
$$f(6) = 2 \iff \begin{cases} \text{l'image de 6 est 2,} \\ \text{6 est un antécédent de 2.} \end{cases}$$

Déterminer une équation réduite

Classe de seconde

Objectif : calculer les coefficients m et p d'une droite à partir de deux de ses points.

Découverte

La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(1; 2)$ et $B(4; 5)$. Son équation est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur mesure la variation de y divisée par celle de x :

$$m = \frac{5 - 2}{4 - 1} = 1.$$

Puis on utilise les coordonnées de A :

$$2 = 1 \times 1 + p,$$

d'où $p = 1$. Ainsi,

$$\boxed{y = x + 1}.$$

Propriétés à retenir

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite non verticale, avec $x_A \neq x_B$.

1. Calcul du coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

2. Calcul de l'ordonnée à l'origine :

$$p = y_A - mx_A$$

ou

$$p = y_B - mx_B.$$

L'équation réduite est alors $\boxed{y = mx + p}$. Pour vérifier, les coordonnées des deux points doivent satisfaire cette équation.

Exemples

Déterminons l'équation de la droite passant par $C(-2; 5)$ et $D(4; -1)$.

$$m = \frac{-1 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Avec le point C :

$$5 = (-1) \times (-2) + p \iff 5 = 2 + p \iff p = 3.$$

La droite a donc pour équation

$$\boxed{y = -x + 3}.$$

Vérification avec D :

$$-4 + 3 = -1 = y_D.$$

Le point D appartient bien à la droite.

Point de vigilance

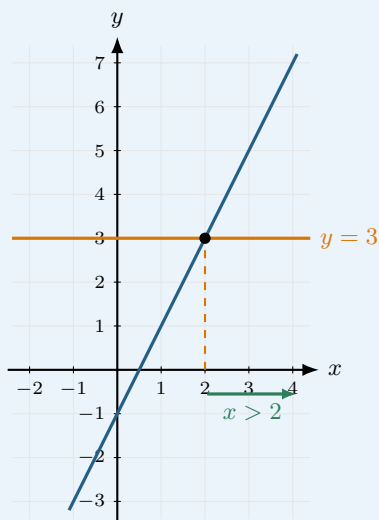
Dans la formule de m , il faut conserver le même ordre au numérateur et au dénominateur. Si l'on écrit $y_B - y_A$, on écrit aussi $x_B - x_A$.

Résoudre une inégalité avec une fonction affine

Classe de seconde

Objectif : résoudre une inégalité du type $f(x) > k$ ou $f(x) < k$, graphiquement et par le calcul.

Découverte

On considère $f(x) = 2x - 1$ et on cherche les nombres x tels que $f(x) > 3$.

La droite $\mathcal{D}_f$ coupe la droite horizontale $y = 3$ pour $x = 2$.

La courbe de f est au-dessus de $y = 3$ lorsque $x > 2$. Donc

$$f(x) > 3 \iff x > 2.$$

La valeur 2 est exclue car l'inégalité est stricte.

Propriétés à retenir

Méthode graphique :

1. tracer ou repérer la droite horizontale d'équation $y = k$;
2. lire les abscisses pour lesquelles $\mathcal{D}_f$ est au-dessus si $f(x) > k$, ou en dessous si $f(x) < k$.

Méthode algébrique : remplacer $f(x)$ par $mx + p$, puis résoudre l'inégalité.

$$f(x) > k \iff mx + p > k.$$

Lorsqu'on divise par un nombre négatif, on **change le sens** de l'inégalité.

Une inégalité large, comme $f(x) \geq k$, inclut l'abscisse du point d'intersection ; une inégalité stricte l'exclut.

Exemples

1. Retrouver le résultat par le calcul

$$2x - 1 > 3 \iff 2x > 4 \iff x > 2.$$

2. Coefficient directeur négatif

Soit $g(x) = -3x + 5$. R  solvs $g(x) \leq -1$:

$$-3x + 5 \leq -1 \iff -3x \leq -6 \iff x \geq 2.$$

Le sens change lors de la division par -3 . L'ensemble des solutions est $S = [2; +\infty[$.

3. Interprétation graphique

La solution précédente correspond aux abscisses pour lesquelles la droite de g est située sous la droite $y = -1$, point d'intersection compris.

Comparer deux nombres

Classe de seconde

Objectif : choisir une méthode efficace pour déterminer lequel de deux nombres est le plus grand.

Découverte

Comparer directement deux expressions n'est pas toujours facile. On peut transformer la comparaison en une étude de signe. Soient deux nombres A et B .

Étudier leur différence

$$A > B \iff A - B > 0,$$

$$A = B \iff A - B = 0,$$

$$A < B \iff A - B < 0.$$

Comparer leur quotient à 1

Si $A > 0$ et $B > 0$, alors

$$A > B \iff \frac{A}{B} > 1,$$

$$A < B \iff \frac{A}{B} < 1.$$

Ces méthodes remplacent une comparaison de deux nombres par la comparaison d'un seul nombre à 0 ou à 1.

Propriétés à retenir

Méthode 1 – Signe de la différence

$$A - B > 0 \Rightarrow A > B, \quad A - B < 0 \Rightarrow A < B.$$

Cette méthode est valable pour tous nombres réels A et B .

Méthode 2 – Quotient de nombres positifs

Si $A > 0$ et $B > 0$, alors

$$\frac{A}{B} > 1 \Rightarrow A > B, \quad \frac{A}{B} < 1 \Rightarrow A < B.$$

Autres réflexes utiles :

- écrire des fractions avec un dénominateur commun positif ;
- utiliser les variations d'une fonction connue ;
- encadrer ou simplifier les expressions avant de les comparer.

Exemples

1. Comparaison par différence

Comparons $A = 3\sqrt{2}$ et $B = 4$. Comme ces deux nombres sont positifs, on peut aussi comparer leurs carrés, mais utilisons ici une différence rationalisée :

$$A - B = 3\sqrt{2} - 4 = \frac{(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)}{3\sqrt{2} + 4} = \frac{18 - 16}{3\sqrt{2} + 4} > 0.$$

Donc $3\sqrt{2} > 4$.

2. Comparaison d'un quotient à 1

Comparons $A = \frac{17}{23}$ et $B = \frac{11}{15}$, tous deux positifs :

$$\frac{A}{B} = \frac{17}{23} \times \frac{15}{11} = \frac{255}{253} > 1.$$

Ainsi $\frac{17}{23} > \frac{11}{15}$.

3. Avec un paramètre

Pour tout réel x , comparons $x^2 + 1$ et $2x$:

$$(x^2 + 1) - 2x = (x - 1)^2 \geq 0.$$

Donc $x^2 + 1 \geq 2x$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

Point de vigilance

La comparaison du quotient à 1 nécessite de connaître le signe du dénominateur. La règle présentée ici s'applique directement lorsque les deux nombres sont strictement positifs.