DM 3 – Fonction affine

Corrigé détaillé et méthodes

Rappel. Une fonction affine s'écrit $x \mapsto ax + b$. Son coefficient a indique si sa droite monte, descend ou reste horizontale ; b est l'image de 0, c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine.

Exercice 1 – Pour s'entraîner pour le DS

1) Compléter le tableau

Fonction f. Le programme demande de multiplier le nombre de départ par 3, puis de soustraire 2. Pour une entrée x :

$$f(x) = 3x - 2.$$

On calcule ensuite les images demandées en remplaçant x par chaque valeur :

$$f(1) = 3 \times 1 - 2 = 1, \qquad f(2) = 3 \times 2 - 2 = 4, \qquad f(0) = 3 \times 0 - 2 = -2.$$

Fonction g. On sait que g est affine et que le tableau donne $g(0) = 0$ et $g(2) = 3$. Écrivons $g(x) = ax+b$. Comme $g(0) = 0$, on obtient $b = 0$. Puis $g(2) = 3$ donne $2a = 3$, donc $a = \frac{3}{2}$. Ainsi, $g(x) = \frac{3}{2}x$. Vérification : $g(-2) = \frac{3}{2} \times (-2) = -3$, comme dans le tableau.

Fonction h. Son expression est fournie : $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Le programme correspondant est « multiplier par $\frac{1}{2}$, puis ajouter 3 ».

$$h(1) = \frac{7}{2}, \qquad h(2) = 4, \qquad h(-4) = 1.$$

Fonction k. Sur le graphique, la droite passe par $(0, 2)$ et $(4, 0)$. Le coefficient directeur est la variation verticale divisée par la variation horizontale :

$$a = \frac{0 - 2}{4 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

L'ordonnée à l'origine est 2, donc $k(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Son programme est « multiplier par $-\frac{1}{2}$, puis ajouter 2 ».

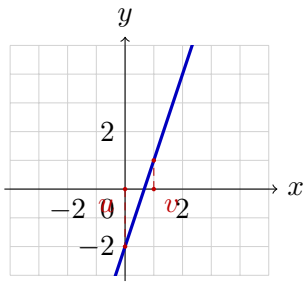
$$k(2) = 1, \qquad k(-2) = 3, \qquad k(1) = \frac{3}{2}.$$

	f	g	h	k
Programme	$\times 3$, puis -2	$\times \frac{3}{2}$	$\times \frac{1}{2}$, puis $+3$	$\times(-\frac{1}{2})$, puis $+2$
Expression	$3x - 2$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{1}{2}x + 3$	$-\frac{1}{2}x + 2$
Valeurs demandées	$1,\ 4,\ -2$	$0,\ 3,\ -3$	$\frac{7}{2},\ 4,\ 1$	$1,\ 3,\ \frac{3}{2}$

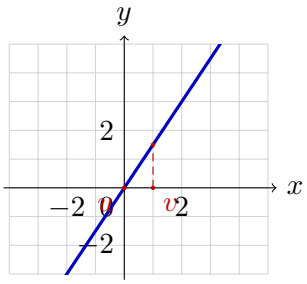
Dans la ligne « valeurs demandées », les résultats sont rangés dans l'ordre des x inscrits dans le tableau de l'énoncé.

Représentations graphiques

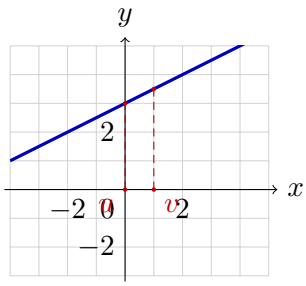
Pour tracer une fonction affine, deux points suffisent : on calcule deux images, on place les points correspondants, puis on trace la droite qui les relie. Les quatre droites ci-dessous complètent les graphiques du devoir.



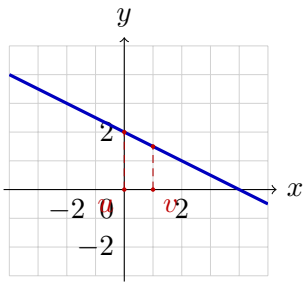
$f(x) = 3x - 2$



$g(x) = \frac{3}{2}x$



$h(x) = \frac{1}{2}x + 3$



$k(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

2) Comparer les images de u et v

On choisit, par exemple, $u = 0$ et $v = 1$. Alors $u < v$. Avec les expressions trouvées plus haut :

$$f(0) = -2 < f(1) = 1, \quad g(0) = 0 < g(1) = \frac{3}{2}, \quad h(0) = 3 < h(1) = \frac{7}{2}, \quad k(0) = 2 > k(1) = \frac{3}{2}.$$

Les trois premières droites montent de gauche à droite : leurs fonctions sont **croissantes**, donc $u < v$ entraîne $f(u) < f(v)$ (et de même pour g et h). La droite de k descend : k est **décroissante**, donc $u < v$ entraîne $k(u) > k(v)$.

Généralisation. Pour une fonction affine $F(x) = ax + b$:

- si $a > 0$, F est croissante ;
- si $a < 0$, F est décroissante ;
- si $a = 0$, F est constante.

Exercice 2 – Pour chercher et réfléchir

Les questions sont indépendantes.

1) Si $x \geq 3$, alors $3x - 4$ est positif

On part de $x \geq 3$. On multiplie les deux membres par 3, qui est positif : le sens de l'inégalité ne change pas.

$$3x \geq 9.$$

On soustrait ensuite 4 aux deux membres :

$$3x - 4 \geq 5 > 0.$$

Donc $3x - 4$ est même supérieur ou égal à 5 ; il est bien positif.

Exercice 2 – Suite

2) Si $t > -6$, alors $t^2 + t + 7 > 0$

On peut compléter le carré. On ajoute et on retire $\frac{1}{4}$:

$$t^2 + t + 7 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 7 - \frac{1}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}.$$

Un carré est toujours positif ou nul, donc $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. De plus, $\frac{27}{4} > 0$. Ainsi,

$$t^2 + t + 7 \geq \frac{27}{4} > 0.$$

L'expression est donc positive pour tout réel t, et en particulier lorsque $t > -6$.

3) Si n est naturel, alors $2^n < 2^{n+1}$

On part de l'inégalité donnée $1 < 2$. La quantité 2^n est positive pour tout entier naturel n ; on peut donc multiplier les deux membres par 2^n sans changer le sens de l'inégalité :

$$1 \times 2^n < 2 \times 2^n.$$

Or $1 \times 2^n = 2^n$ et $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Donc

$$\boxed{2^n < 2^{n+1}}.$$

4) Retrouver la fonction affine

Écrivons $f(x) = ax + b$. Comparons les images de deux nombres consécutifs :

$$f(2) - f(1) = a.$$

Or $f(1) \leq f(2)$, donc $a \geq 0$. De même,

$$f(4) - f(3) = a.$$

La condition $f(3) \geq f(4)$ donne $f(4) - f(3) \leq 0$, donc $a \leq 0$. Les deux conditions imposent alors $a = 0$. La fonction est constante : $f(x) = b$. Comme $f(5) = 5$, on a $b = 5$. La seule fonction possible est

$$\boxed{f(x) = 5}.$$

On vérifie qu'elle convient : toutes ses images valent 5, donc les deux inégalités sont des égalités.

5) Trouver f telle que $f(f(x)) = 4x - 3$

Cherchons une fonction affine $f(x) = ax + b$. Appliquer f à $f(x)$ revient à remplacer x par $ax + b$ dans la formule :

$$f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = a^2x + b(a + 1).$$

Pour que cette expression soit égale à $4x - 3$, les coefficients devant x et les termes constants doivent être égaux :

$$a^2 = 4, \qquad b(a + 1) = -3.$$

La première égalité donne deux possibilités : $a = 2$ ou $a = -2$.

- Si $a = 2$, alors $3b = -3$, donc $b = -1$. On obtient $f(x) = 2x - 1$.
- Si $a = -2$, alors $-b = -3$, donc $b = 3$. On obtient $f(x) = -2x + 3$.

Il y a donc deux réponses. Vérifions-les par composition :

$$(2x - 1) \text{ réappliquée donne} \quad 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3,$$
$$(-2x + 3) \text{ réappliquée donne} \quad -2(-2x + 3) + 3 = 4x - 3.$$

Les deux fonctions recherchées sont donc $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ ou $\boxed{f(x) = -2x + 3}$.

Exercice 3 – Pour jouer

Comment lire un parcours. On nomme les colonnes A, B, C, D de gauche à droite, et les lignes de haut en bas (par exemple, dans une grille 3×3, la case en haut à gauche est $A3$ et celle en bas à droite est $C1$). La flèche indique la case suivante. Une étoile est notée $\star$: quand on arrive dessus, la pièce change immédiatement (tour $\leftrightarrow$ fou). Chaque case de la liste doit apparaître une seule fois.

Grille A

$$A3 \longrightarrow A2 \longrightarrow A1 \longrightarrow B1^{\star} \longrightarrow C2 \longrightarrow B3^{\star} \longrightarrow C3^{\star} \longrightarrow B2 \longrightarrow C1.$$

On part de $A3$ comme une tour : les déplacements vers $A2$, $A1$, puis $B1$ sont horizontaux ou verticaux. L'étoile en $B1$ transforme la tour en fou. Le fou rejoint $C2$, puis l'étoile $B3$, qui le retransforme en tour. La tour va ensuite en $C3$ (nouvelle étoile : elle devient fou), puis le fou passe par $B2$ et termine en $C1$. Les neuf cases apparaissent une seule fois.

Grille B

$$A3 \longrightarrow B3 \longrightarrow C3^{\star} \longrightarrow B2^{\star} \longrightarrow A2 \longrightarrow A1 \longrightarrow B1^{\star} \longrightarrow C2^{\star} \longrightarrow C1.$$

La tour part de $A3$ et rejoint l'étoile $C3$ en passant par $B3$: $B3$ est visité pendant le déplacement. Elle devient fou en $C3$, puis rejoint l'étoile $B2$ en diagonale et redevient tour. Elle passe ensuite par $A2$, $A1$ et l'étoile $B1$ (qui la transforme en fou). Le fou rejoint l'étoile $C2$ en diagonale et redevient tour, puis descend en $C1$. Les neuf cases sont visitées.

Grille C

$$\begin{aligned} A4 \longrightarrow A3^{\star} \longrightarrow B4 \longrightarrow C3 \longrightarrow B2 \longrightarrow C1^{\star} \longrightarrow B1 \longrightarrow A1 \longrightarrow A2^{\star} \longrightarrow B3 \\ \longrightarrow C4^{\star} \longrightarrow D4 \longrightarrow D3^{\star} \longrightarrow C2^{\star} \longrightarrow D2 \longrightarrow D1. \end{aligned}$$

On part de $A4$ comme une tour et atteint l'étoile $A3$: on devient fou. Le fou suit les diagonales jusqu'à l'étoile $C1$, où il redevient tour. La tour passe par $B1$, $A1$, puis l'étoile $A2$: on redevient fou. On suit les diagonales vers $B3$ et l'étoile $C4$, où l'on redevient tour. La tour rejoint $D4$, puis l'étoile $D3$ transforme la pièce en fou. Enfin, le fou rejoint l'étoile $C2$, redevient tour, et termine par $D2$, puis $D1$. Les seize cases sont parcourues une seule fois et la dernière est bien celle en bas à droite.

Astuce de vérification : à chaque étoile, noter le changement de pièce avant de choisir le déplacement suivant. Un passage par une étoile impose de s'arrêter sur cette case pour changer de direction ; on ne peut pas la franchir comme si elle était une case ordinaire.